ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988 — **MATHEMATIQUES I**

Option économique
Lundi 9 mai 1988 de 14h à 18h

Exercice 1: Valeurs approchées de ln 2, ln 3, ln 5 et ln 7

A. Valeur approchée d'une intégrale:

1. Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur [0,1]. On note: $R(f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\right) f''(x)dx$

Montrer, en intégrant par parties, que:

(1) $$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{12}[f'(1) - f'(0)] + R(f)$$

2. Démontrer de façon analogue que, si l'on suppose f de classe C^4 sur [0,1]:

$$R(f) = \frac{1}{24}\int_0^1 x^2(1-x)^2 f^{(4)}(x)dx$$

En déduire que: $$|R(f)| \leq \frac{M_4(f)}{720} \quad \text{avec} \quad M_4(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$$

La formule (1) conduit à prendre comme valeur approchée de $I = \int_0^1 f(x)dx$

$$J = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{12}[f'(1) - f'(0)].$$

B. Application:

On désigne par a un nombre réel strictement positif, par f la fonction $x \mapsto \frac{a}{1+ax}$ et l'on conserve les notations du A.

1. Calculer I, J, $M_4(f)$. En déduire un majorant de l'erreur commise en prenant J comme valeur approchée de I.

2. On donne à a les valeurs successives : $a_1 = \frac{1}{63}$ $a_2 = \frac{1}{80}$ $a_3 = \frac{1}{24}$ $a_4 = \frac{1}{15}$

On note I_1, I_2, I_3, I_4 les valeurs respectives de I et J_1, J_2, J_3, J_4 les valeurs respectives de J.

a) Ecrire la matrice M telle que :

$$M\begin{pmatrix} \ln 7 \\ \ln 5 \\ \ln 3 \\ \ln 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer ln 7, ln 5, ln 3 et ln2 en fonction de I_1, I_2, I_3, I_4 (on pourra procéder par pivotage).

c) Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 et donner les valeurs approchées ainsi obtenues de ln 7, ln 5, ln 3 et ln 2.
Evaluer la précision des résultats en comparant les valeurs obtenues à celles fournies par la calculatrice.

d) Proposer un choix de a permettant d'obtenir, avec une précision comparable, une valeur approchée de ln 11.

Exercice 2: Détermination de valeurs approchées d'exponentielles

A. Etude d'une suite de fonctions:

On note, pour tout nombre réel λ, et pour tout entier naturel n : $U_n(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda(1-x)} x^n dx$

1/. Convergence de la suite $(U_n(\lambda))_{n \in N}$:

Soit λ un réel donné. Démontrer que la suite $(U_n(\lambda))_{n \in N}$ est décroissante et que:

$$\forall n \in N \quad 0 \leq U_n(\lambda) \leq \frac{\text{Max}(1, e^{\lambda})}{n+1}$$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n(\lambda)$

2/. Relation de récurrence vérifiée par $(U_n(\lambda))$:

a) Expliciter $U_0(\lambda)$.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout λ réel non nul :

(1) $$\lambda U_{n+1}(\lambda) = -1 + (n+1)U_n(\lambda)$$

Cette formule est-elle valable pour $\lambda = 0$?

3/. Forme explicite de $U_n(\lambda)$:

a) Montrer, par récurrence sur n, que, si $\lambda \neq 0$: (2) $$U_n(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\left[e^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\right]$$

En déduire que la fonction $U_n : \lambda \mapsto U_n(\lambda)$ est continue en 0.

b) Préciser le sens de variation de la fonction U_n et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

4/. Etude de la suite $(U_n(1))$:

a) Montrer que: $\forall n \geq 1$ $$0 < U_n(1) \leq \frac{1}{n}$$ (on pourra utiliser (1))

b) Ecrire un algorithme de calcul des premiers termes de la suite $(U_n(1))$, en prenant comme valeur approchée de e celle fournie par la calculatrice et en utilisant la relation (1).
Donner les valeurs approchées de $U_{15}(1)$ et $U_{16}(1)$ ainsi obtenues. Paraissent-elles plausibles ?

T.S.V.P.

B. Valeurs approchées d'exponentielles:

1/. Etude d'une suite:

On suppose, dans cette question, que λ est un réel donné non nul. On définit une suite réelle $(V_n)_{n\in N}$ par la donnée d'un nombre réel V_0 et de la relation de récurrence:

(3) $\quad \forall n \in N \quad \lambda V_{n+1} = -1 + (n+1)V_n$

a) Exprimer V_n en fonction de $U_n(\lambda)$, λ, n et V_0.

b) Discuter la nature de la suite (V_n) suivant V_0.

2/. Application:

On suppose désormais que $\lambda \in [-1,0[\cup]0,1]$.

a) Soit p un entier naturel et $(V_n)_{n\in N}$ la suite vérifiant (3) telle que $V_p=0$.

Montrer qu'alors $1 + \lambda V_0$ est une valeur approchée de e^{λ} à $\frac{1}{p.p!}$ près.

b) Programmer un algorithme de calcul approché de e^{λ} utilisant la suite (V_n) telle que $V_{12} = 0$ et la relation (3) pour obtenir V_0.
Utiliser cet algorithme pour obtenir des valeurs approchées de e, $\frac{1}{e}$, $\sqrt{e}$

(on conservera toutes les décimales fournies par la machine).
Quelle est la précision des résultats obtenus ?

3/. Proposer de même un algorithme permettant d'obtenir des valeurs approchées de U_{15} (1) et U_{16} (1).

Exercice 3: Algèbre et Probabilités

On dispose d'une urne A_1, contenant deux boules et d'une urne A_2 en contenant six, et l'on suppose que, parmi ces huit boules figurent deux boules blanches et six boules noires.

A. Cas d'une épreuve:

On procède à l'épreuve E suivante: on tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A_1 est remise dans l'urne A_2, celle tirée de A_2 est remise dans A_1.

Déterminer, pour tout $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$ la probabilité conditionnelle, notée $p(i,j)$, que l'urne A_1 possède i boules blanches à l'issue de l'épreuve E sachant qu'elle en contenait j avant cette épreuve.

On note dans la suite:
$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,2) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,2) \\ p(2,0) & p(2,1) & p(2,2) \end{pmatrix}$$

B. Cas d'épreuves répétées:

On répète désormais l'épreuve E précédente en supposant qu'initialement l'urne A_1 contient deux boules noires, les six autres boules étant dans A_2.
On note, pour tout entier naturel $n \geq 1$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans A_1 à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, a_n, b_n, c_n les probabilités des événements respectifs $[X_n=0]$, $[X_n=1]$ et $[X_n=2]$ et enfin
$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1/ Que vaut $a_n + b_n + c_n$?

2/ Montrer que pour tout entier naturel n:
$$U_{n+1} = PU_n \quad \text{(en convenant que } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{)}.$$

3/ Montrer en les déterminant qu'il existe deux constantes α et β réelles telles que, si l'on note $E(X_n)$ l'espérance mathématique de X_n, on ait pour $n \geq 1$:
$$E(X_{n+1}) = \alpha + \beta E(X_n).$$

En déduire $E(X_n)$.

4/

a) Soit
$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
un vecteur propre de la matrice ${}^tP$ (transposée de P). Montrer que la suite $({}^tVU_n)$ est géométrique.

b) Vérifier que $-\frac{1}{6}$ est une valeur propre de ${}^tP$ et donner un vecteur propre V associé.

Calculer alors ${}^tVU_n$.

5/

a) Déduire des questions B 1, 3 et 4, les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n, et déterminer les trois matrices U, U', U" (à trois lignes et une colonne) telles que:
$$\forall n \in N \quad U_n = U + \left(\frac{1}{3}\right)^n U' + \left(-\frac{1}{6}\right)^n U''$$

b) En remarquant que
$$U = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \end{pmatrix}$$
et en utilisant la relation $U_{n+1} = PU_n$, montrer que U est un vecteur propre de P.

c) Interpréter de même U' et U". P est-elle diagonalisable ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail